<u>ΛΥΣΕΙΣ</u>

<u>ΙΟΥΝΙΟΣ 2003</u>

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 217

Β. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 247

Γ. α. Σ, β. Σ , γ. Σ , δ. Λ , ε. Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α.

$w = 3z - i\overline{z} + 4 = 3(\alpha + \beta i) - i(\alpha - \beta i) + 4$

$= 3\alpha + 3\beta i - \alpha i - \beta + 4$

$= (3\alpha - \beta + 4) + (3\beta - \alpha)i$

Οπότε $\mathrm{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$ και $\mathrm{Im}(w) = 3\beta - \alpha$

β.

Οι εικόνες του w είναι τα σημεία $(3\alpha - \beta + 4\,,\,3\beta - \alpha)$. Αφού κινούνται στην ευθεία $y = x - 12$, έχουμε $3\beta - \alpha = 3\alpha - \beta + 4 - 12 \Leftrightarrow \beta = \alpha - 2$, πράγμα που σημαίνει ότι τα σημεία (α, β) τα οποία είναι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία $y = x - 2$

γ.

Φέρνω την $OM \perp (\varepsilon)$.

Τότε το σημείο της (ε) που είναι πλησιέστερα στην αρχή O είναι το M .

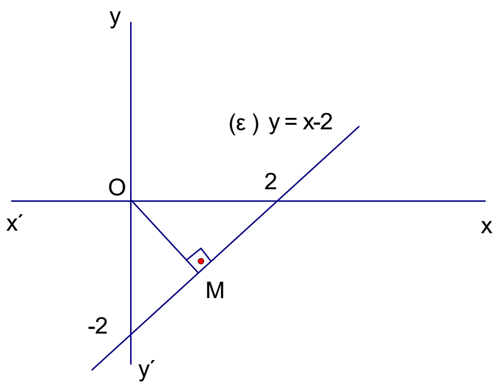
Το M λοιπόν θα είναι η εικόνα του μιγαδικού z με το ελάχιστο μέτρο.

$\lambda_\varepsilon = 1$ οπότε $\lambda_{OM} = -1$ και επομένως

$OM: \ y = -x$.

Λύνοντας το σύστημα των $y = x - 2$, $y = -x$ βρίσκουμε $x = 1$ και $y = -1$

Ο μιγαδικός λοιπόν με το ελάχιστο μέτρο είναι ο $z = x - i$



ΘΕΜΑ 3ο

α.

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$f''(x) = 20x^3 + 6x = x(20x^2+1)$

$f''(x) = 0 \iff x(20x^2+1) = 0 \iff x = 0$

$f''(x) > 0 \iff x(20x^2+1) > 0 \iff x > 0$

$f''(x) < 0 \iff x(20x^2+1) < 0 \iff x < 0$

Άρα η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty, 0]$

Τέλος, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι '1—1', άρα αντιστρέφεται

β.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η ανίσωση $f(e^x) \geq f(x+1) \iff$

$e^x \geq x + 1$

$e^x - x - 1 \geq 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = e^x - 1$

$g'(x) = 0 \iff e^x - 1 = 0 \iff e^x = 1 \iff e^x = e^0 \iff x = 0$

$g'(x) > 0 \iff e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$

$g'(x) < 0 \iff e^x - 1 < 0 \iff e^x < 1 \iff e^x < e^0 \iff x < 0$

επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $g(x) \geq 0 \iff e^x \geq x + 1$.

γ.

$f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$ οπότε η εφαπτομένη στο $(0, f(0))$ έχει εξίσωση
$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \iff y = x$
Η ευθεία αυτή όμως είναι ο άξονας συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$.

δ.

Όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα, λόγω της συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$ ως προς την ευθεία $y = x$, το σημείο $(0, 0)$ είναι κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων. Επομένως η $C_{f^{-1}}$ τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $x_o = 0$, οπότε $f^{-1}(0) = 0$. Επειδή όμως η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα (οι αντίστροφες συναρτήσεις έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας αποδεικνύεται παρακάτω) το σημείο αυτό είναι μοναδικό.
Το διάστημα ολοκλήρωσης είναι λοιπόν το $[0, 3]$ στο οποίο η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα, άρα για $x \geq 0 \iff f^{-1}(x) \geq f^{-1}(0) \iff f^{-1}(x) \geq 0$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_0^3 f^{-1}(x)dx$

Θέτω $f^{-1}(x) = u \iff f(u) = x$, άρα $dx = f'(u)du$

Όταν $x = 0$ τότε $f^{-1}(0) = u \Leftrightarrow f^{-1}(f(0)) = u \Leftrightarrow u = 0$

Όταν $x = 3$ τότε $f^{-1}(3) = u \Leftrightarrow f^{-1}(f(1)) = u \Leftrightarrow u = 1$

Επομένως

$$E = \int_0^1 u f'(u)du = \int_0^1 u(5u^4 + 3u^2 + 1)du =$$

$$= \int_0^1 (5u^5 + 3u^3 + u)du$$

$$= \left[\frac{5u^6}{6} + \frac{3u^4}{4} + \frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{25}{12} \quad \text{τετραγωνικές μονάδες}$$

Σημείωση : Απόδειξη του ότι και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα

Έστω ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα.

Τότε θα υπάρχουν x_1, x_2 με $x_1 > x_2$ ώστε $f^{-1}(x_1) \le f^{-1}(x_2) \overset{\text{f γν. αύξουσα}}{\Rightarrow}$

$f(f^{-1}(x_1)) \le f(f^{-1}(x_2)) \Rightarrow$

$x_1 \le x_2$ που είναι άτοπο

ΘΕΜΑ 4ο

α.

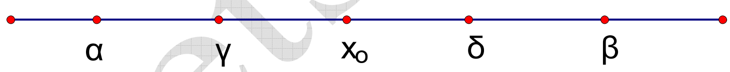
Έστω $\gamma < \delta$.

Η f είναι συνεχής στο $[\gamma, \delta] \subseteq (\alpha, \beta)$ με $f(\gamma).f(\delta) < 0$

Άρα , από το θεώρημα του Bolzano, θα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα x_o της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(\gamma, \delta) \subseteq (\alpha, \beta)$

β.

Έστω ότι $f(\gamma) > 0$ και $f(\delta) < 0$. Η θέση των α, β, γ, δ, x_o φαίνεται στον άξονα



Σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[\alpha, \gamma]$, $[\gamma, x_o]$, $[x_o, \delta]$, $[\delta, \beta]$, η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής ,

άρα θα υπάρχουν $\kappa \in (\alpha, \gamma)$, $\lambda \in (\gamma, x_o)$, $\mu \in (x_o, \delta)$ και $\nu \in (\delta, \beta)$ ώστε

$$f'(\kappa) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} = \frac{f(\gamma) - 0}{\gamma - \alpha} = \frac{f(\gamma)}{\gamma - \alpha} > 0 \quad \text{αφού } f(\gamma) > 0 \text{ και}$$

$$f'(\lambda) = \frac{f(x_o) - f(\gamma)}{x_o - \gamma} = \frac{0 - f(\gamma)}{x_o - \gamma} = \frac{-f(\gamma)}{x_o - \gamma} < 0 \quad \text{αφού } f(\gamma) > 0 \text{ και}$$

$$f'(\mu) = \frac{f(\delta) - f(x_o)}{\delta - x_o} = \frac{f(\delta) - 0}{\delta - x_o} = \frac{f(\delta)}{\delta - x_o} < 0 \quad \text{αφού } f(\delta) < 0 \text{ και}$$

$$f'(\nu) = \frac{f(\beta) - f(\delta)}{\beta - \delta} = \frac{0 - f(\delta)}{\beta - \delta} = \frac{-f(\delta)}{\beta - \delta} > 0 \quad \text{αφού } f(\delta) < 0$$

Σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[\kappa , \lambda]$ και $[\mu , \nu]$, η f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής ,
άρα θα υπάρχουν $\xi_1 \in (\kappa , \lambda)$ και $\xi_2 \in (\mu, \nu)$ ώστε

$f''(\xi_1) = \dfrac{f'(\lambda) - f'(\kappa)}{\lambda - \kappa} < 0$ αφού $f'(\lambda) < 0$ και $f'(\kappa) > 0$ και

$f''(\xi_2) = \dfrac{f'(\nu) - f'(\mu)}{\nu - \mu} > 0$ αφού $f'(\nu) > 0$ και $f'(\mu) < 0$

γ.

Η f'' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ είναι συνεχής και $f''(\xi_1) f''(\xi_2) < 0$.
Άρα , με βάση το θεώρημα Bolzano , η εξίσωση $f''(x) = 0$ θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ξ_1, ξ_2) , οπότε η f θα έχει ένα **πιθανό** σημείο καμπής .